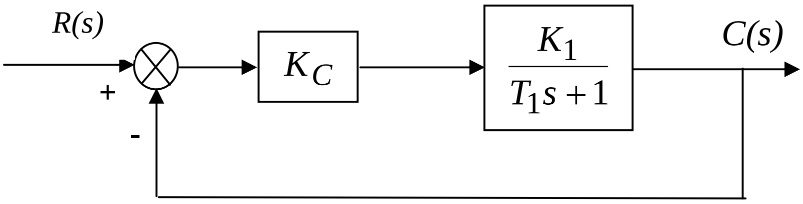
SISTEMAS DE PRIMER ORDEN - TIPO 0



Función de Transferencia a Lazo Cerrado (FTLC): $\frac{C(s)}{R(s)}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\frac{K_C K_1}{T_1 s + 1}}{1 + \frac{K_C K_1}{T_1 s + 1}} = \frac{K_C K_1}{T_1 s + (1 + K_C K_1)}$$

Tomando $K_P = K_1 \, K_C$ $\quad K = \frac{K_P}{1 + K_P}$ $\quad$ y $\quad T = \frac{T_1}{1 + K_P}$

Podemos representar nuestro sistema como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

donde: K = Ganancia del sistema.

T = Constante de tiempo del sistema.

RESPUESTA AL ESCALON: $R(s) = \dfrac{A}{s}$

Sustituyendo: $C(s) = \dfrac{KA}{s(Ts+1)}$

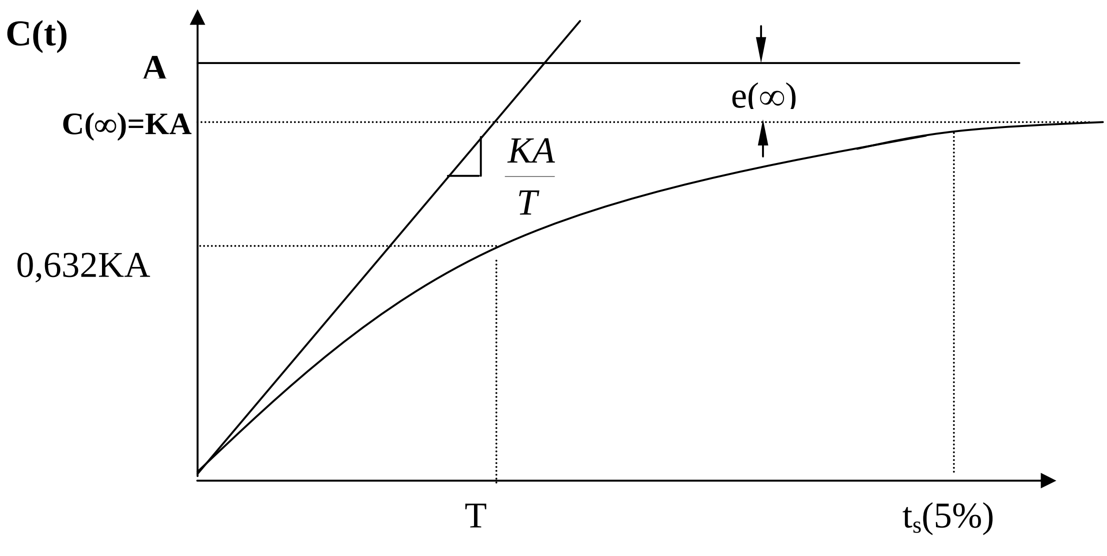
Aplicando fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{KA}{s(Ts+1)} = \frac{KA/T}{s\left(s+1/T\right)} = \left(\frac{K}{s} - \frac{K}{s+1/T}\right)A$$

Por lo tanto:

Respuesta en el tiempo: $c(t) = K\,A\left(1 - e^{-t/T}\right)$

Para: $t = T\,;\; c(t) = K\,A\left(1 - e^{-1}\right) = 0.632KA$



Respuesta al escalón de un sistema de 1^er orden tipo 0

En conclusión:

Respuesta al escalón de un sistema de primer orden Tipo 0:

a) Respuesta estacionaria:

Error en estado estacionario**:** $e(t) = r(t) - c(t) \quad \Rightarrow$

$$e_{ss} = e(\infty) = A - c(\infty) = \left(A - \frac{K_P A}{1 + K_P} \right) = \frac{A}{1 + K_P}$$

b) Respuesta Transitoria:

Queda definida por la constante de tiempo *T*.

Está caracterizada por el tiempo de establecimiento t_s, en el cual la respuesta alcanza los siguientes valores:

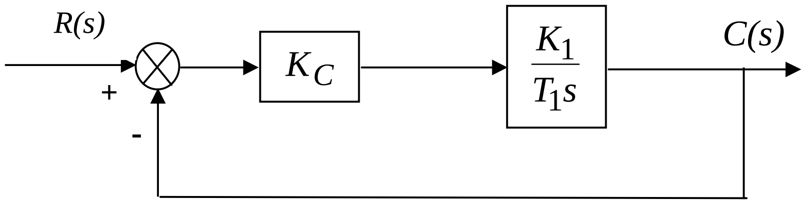
$t_s = 3\,T \Rightarrow c(3T) = 0.95\ c(\infty) \ \Rightarrow$

la respuesta permanece dentro de un 5% del valor final

$t_s = 4\,T \Rightarrow c(4T) = 0.98\ c(\infty) \ \Rightarrow$

la respuesta permanece dentro de un 2% del valor final

SISTEMA DE PRIMER ORDEN - TIPO 1



Función de Transferencia a Lazo Cerrado (FTLC): $\dfrac{C(s)}{R(s)}$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{\dfrac{K_P}{T_1 s}}{1 + \dfrac{K_P}{T_1 s}} = \frac{K_P}{T_1 s + K_P}$$

Podemos reescribir el sistema como:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{Ts + 1}$$

donde: K = Ganancia del sistema = 1

T = Constante de tiempo del sistema $= \dfrac{T_1}{K_P}$

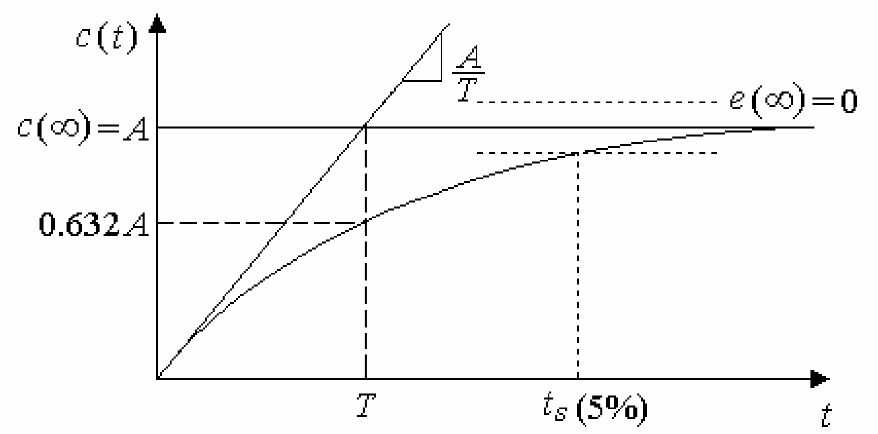
RESPUESTA AL ESCALON: $R(s) = \frac{A}{s}$

Sustituyendo y aplicando fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{A}{s\left(s + 1/T\right)} = \frac{A}{s} - \frac{A}{s + 1/T}$$

Respuesta en el tiempo: $c(t) = A\left(1 - e^{-t/T}\right)$

Para $t = T$: $\quad c(t) = A\left(1 - e^{-1}\right) = 0.632A$



Respuesta al escalón de un sistema de primer orden Tipo 1

Nótese que en este caso:

El error es: $e(t) = r(t) - c(t) \Rightarrow$

Error en estado estacionario: $e_{ss} = e(\infty) = A - c(\infty) = A - A = 0$

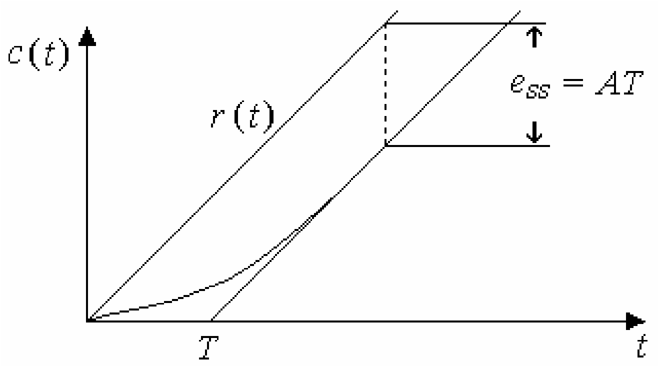
RESPUESTA A LA RAMPA: $R(s) = \dfrac{A}{s^2}$

Sustituyendo y aplicando fracciones parciales:

$$C(s) = \frac{A}{s^2(Ts+1)} = A\left(\frac{1}{s^2} - \frac{T}{s} + \frac{T}{s + 1/T}\right)$$

Antitransformando se obtiene:

Respuesta en el tiempo: $c(t) = A\left(t - T + T\,e^{-t/T}\right)$



Respuesta a la rampa de un sistema de 1er orden Tipo1

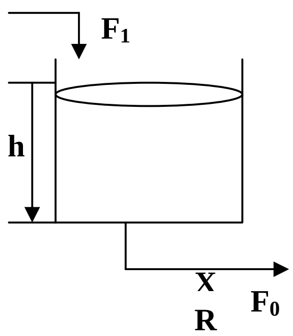
La rapidez de la respuesta transitoria viene dada siempre por *T*.

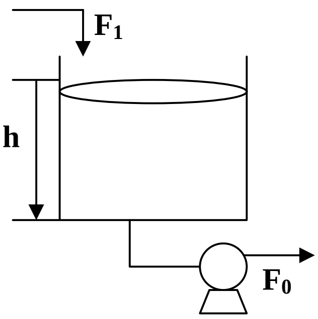
Para el error en estado estacionario se tiene en cambio:

Error: $e(t) = r(t) - c(t) \Rightarrow$

Error en estado estacionario: $e_{SS} = e(\infty) = AT - c(\infty) = AT$

RESPUESTA TRANSITORIA





$$A\frac{dh}{dt} = F - F_0$$

$$F_0 = \frac{h}{R}$$

$$AR\frac{dh^*}{dt} + h^* = RF_1^*$$

$$G(S) = A\frac{H^*(S)}{F_1^*} = \frac{K_P}{\tau_P S + 1}$$

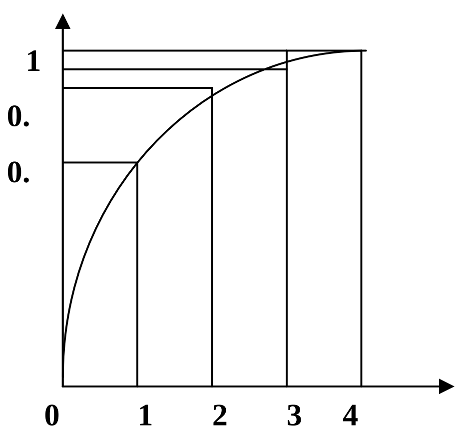
$K_P = R$= ganancia estática
$\tau_p = AR$=ctte de tiempo

Cambio escalón $F_1{*}(S)=1/S$

$$H^*(S) = \frac{K_P}{S(\tau_P S + 1)}$$

$$h(t) = k_p(1 - e^{-t/\tau})$$

$h(t) \longrightarrow k_p$ $\quad$ si $t \longrightarrow \infty$



$$A\frac{dh}{dt} = F - F_0$$

$$A\frac{dh}{dt} = F_1$$

$$G(S) = A\frac{H^*(S)}{F_1^*} = \frac{K_P}{S}$$

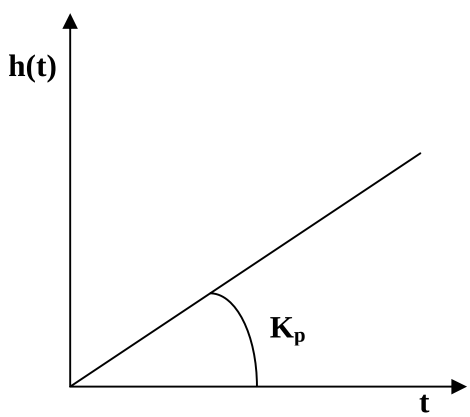
$K_P = 1/A$=ganancia estática

Cambio escalón $F_1{*}(S)=1/S$

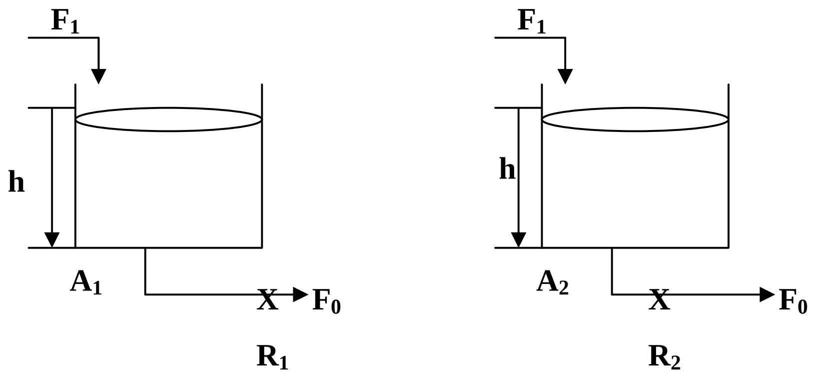
$$H^*(S) = \frac{K_P}{S^2}$$

$$h(t) = k_p t$$

$h(t) \longrightarrow \infty$ $\quad$ si $t \longrightarrow \infty$



EFECTOS DE LOS PARAMETROS EN LA RESPUESTA DE LOS SISTEMAS DE PRIMER ORDEN



$G(S) = \dfrac{K_P}{\tau_P S + 1}$ donde $\tau_p = AR$ $K_P = R$

Parámetros *A* y *R*

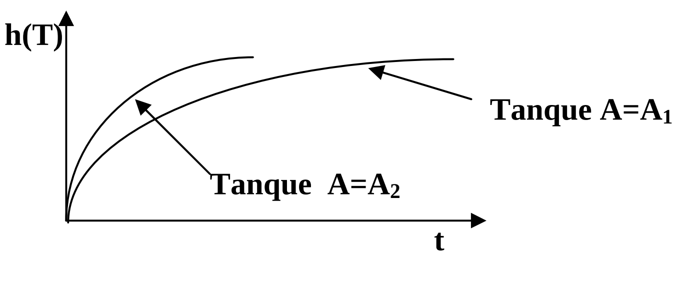
A: area transversal del tanque (medida de su capacidad de almacenamiento)
$\tau_{p:}$ ctte de tiempo=(capacidad de almacenamiento) (resistncia del flujo)

1) efecto del area
   $A_1 > A_2$ R $\longrightarrow \tau_{p1} > \tau_{p2}$

Tanque con mayor capacidad de almacenamiento tiene constante de tiempo mayor mientras que la ganancia estatica es la misma.

$H^*(t) = K_P(1 - e^{-t/\tau})$

Tanque con menor área responde más rápido.



2) Efecto del Área y la Resistencia

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{R_2}{R_1}$$

$\tau_{p2} = A_1R_1 = A_2R_2 = \tau_{p2}$

$A_1 > A_2 \longrightarrow R_2 > R_1 \longrightarrow K_{P1} > K_P$

Mientras sea mayor es la ganancia estática de un tanque, mayor es el valor del nivel del estado estacionario para la misma perturbación.